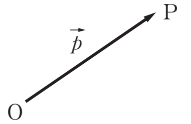
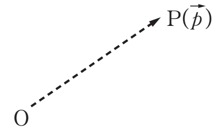
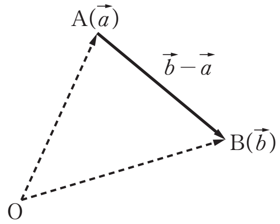
第41講　平面ベクトル(3)

【基礎確認事項】

[1]　位置ベクトル







□座標平面の原点をOとすると，平面上の任意の点Pの位置は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ で決まる．このように，ある固定された点を始点とする有向線分で表されるベクトルを，その点に関する点Pの**位置ベクトル**という．

始点はどの点でもよいが，特に断らない限り以下では点Oに関する位置ベクトルを扱う．位置ベクトルが $\vec{p}$ である点Pを **P($\vec{p}$)** と表す．

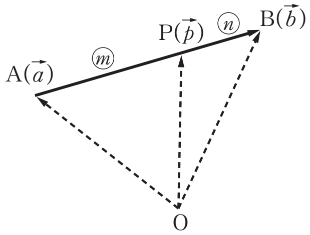
例　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より

2点A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)に対して　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

□点Aの座標は，Oに関する点Aの位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の成分である．

[2]　分点を表す位置ベクトル

□A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)を結ぶ線分ABを $m:n$ に内分する点Pの位置ベクトルを $\vec{p}$ とすると



$$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$ である．

したがって，$\boxed{\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}}$ である．

同様に，線分ABを $m:n$ に外分する点Qの位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると

$\boxed{\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}}$ と表される．

⇒　C&U 1

[3]　共線条件

□平面上の3点A，B，Cにおいて，次のことが成り立つ．

> **共線条件**
> 3点A，B，Cが同一直線上にある　$\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　となる実数 k が存在

例　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が1次独立で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+3\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$　のとき

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　より　点Cは直線AB上にある．

つまり，3点A，B，Cは同一直線上にある．

⇒　C&U 2

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を次のように分ける点の位置ベクトルを求めよ．

(1) 2：5 に内分する点 P　　(2) 1：3 に外分する点 Q

2 $\overrightarrow{OA}=-2\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=4\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=2\vec{a}+4\vec{b}$，$\overrightarrow{OD}=6\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{OE}=-2\vec{a}-6\vec{b}$ であるとき，次のことを証明せよ．ただし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立である．

(1) 3 点 O，A，B は一直線上にある．

(2) AC∥BD

(3) 3 点 B，D，E は一直線上にある．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　平面ベクトル(3)

1　3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC において，辺 BC を 2：3 に内分する点を D，辺 BC を 1：2 に外分する点を E，△ABC の重心を G，△AED の重心を G′ とする．次の問いに答えよ．

(1)　点 G，点 G′ の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{GG'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ であることを証明せよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　△ABC と点 P に関して，等式 $6\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ が成り立っている．次の問いに答えよ．

(1)　点 P の位置を答えよ．

(2)　面積比 △PBC：△PCA：△PAB を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　平行四辺形ABCDにおいて，辺CDを$1:2$に内分する点をE，対角線BDを$3:2$に内分する点をFとする．このとき，3点A，F，Eは一直線上にあることを証明せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　平面ベクトル(3)

△ABC と点 P に対して，等式　$5\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立つとき，

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\boxed{ア}\overrightarrow{AB}+\boxed{イ}\overrightarrow{AC}}{\boxed{ウエ}}=\dfrac{\boxed{ア}+\boxed{イ}}{\boxed{ウエ}}\cdot\dfrac{\boxed{ア}\overrightarrow{AB}+\boxed{イ}\overrightarrow{AC}}{\boxed{ア}+\boxed{イ}}$ と変形できる．$\dfrac{\boxed{ア}\overrightarrow{AB}+\boxed{イ}\overrightarrow{AC}}{\boxed{ア}+\boxed{イ}}=\overrightarrow{AQ}$ とおくと，点 Q は辺 BC を $\boxed{イ}:\boxed{ア}$ に内分する点であり．点 P は線分 AQ を $\boxed{オ}:\boxed{カ}$ に内分する点である．また面積比 △PBC：△PCA：△PAB＝$\boxed{キ}:\boxed{ク}:\boxed{ケ}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　平面ベクトル(3)

【CHECK & UP】

1 (1)　P($\vec{p}$) とすると

$$\vec{p}=\frac{5\vec{a}+2\vec{b}}{2+5}=\frac{5\vec{a}+2\vec{b}}{7}=\boldsymbol{\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}}$$

(2)　Q($\vec{q}$) とすると

$$\vec{q}=\frac{3\vec{a}+(-1)\vec{b}}{-1+3}=\frac{3\vec{a}-\vec{b}}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}}$$

位置ベクトルによる内分点, 外分点の表現である. 位置ベクトルは「始点の固定化」である. よって点 O を始点とするのみならず, 問題によって与えられた 2 つのベクトルの始点が同じ場合には, 分点の扱いに関してこの位置ベクトルの考え方を使うことが非常に多いであろう.

2 (1)　$\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OA}$　より　3 点 O, A, B は一直線上にある.

(2)　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{a}+4\vec{b})-(-2\vec{a})$

$=4\vec{a}+4\vec{b}=4(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=(6\vec{a}+2\vec{b})-4\vec{a}$

$=2\vec{a}+2\vec{b}=2(\vec{a}+\vec{b})$

よって　$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BD}$　より　AC∥BD

共線条件の基本問題である.
　2 つのベクトルのうち, 片方を実数倍したものがもう片方になっていれば, 2 つのベクトルは「平行」である.
　さらに, 2 つのベクトルの「始点が同じ」場合は 2 つのベクトルは「同一直線上」にあり, その始点とそれぞれのベクトルの終点の 3 点が同一直線上にある, すなわち 3 点が「共線」である.

(3)　$\overrightarrow{BD}=2(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}=(-2\vec{a}-6\vec{b})-4\vec{a}=-6\vec{a}-6\vec{b}=-6(\vec{a}+\vec{b})$

よって　$\overrightarrow{BE}=-3\overrightarrow{BD}$　より　3 点 B, D, E は一直線上にある.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　平面ベクトル(3)

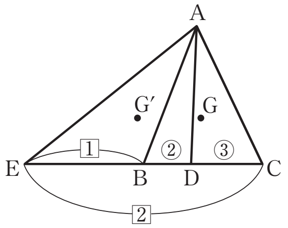
1　3 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 BC を 2：3 に内分する点を D，辺 BC を 1：2 に外分する点を E，△ABC の重心を G，△AED の重心を G′ とする．次の問いに答えよ．

(1)　点 G，点 G′ の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{GG'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ であることを証明せよ．

$D(\vec{d})$，$E(\vec{e})$，$G(\vec{g})$，$G'(\vec{g'})$ とする．



(1)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}$

$\vec{g'}=\dfrac{\vec{a}+\vec{e}+\vec{d}}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\dfrac{2\vec{b}-\vec{c}}{-1+2}+\dfrac{3\vec{b}+2\vec{c}}{2+3}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\dfrac{13}{5}\vec{b}-\dfrac{3}{5}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{13}{15}\vec{b}-\dfrac{1}{5}\vec{c}}$

(2)　$\overrightarrow{GG'}=\vec{g'}-\vec{g}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{13}{15}\vec{b}-\dfrac{1}{5}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\dfrac{8}{15}\vec{b}-\dfrac{8}{15}\vec{c}}$

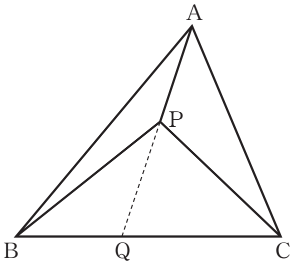
(3)　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(\vec{a}-\vec{g})+(\vec{b}-\vec{g})+(\vec{c}-\vec{g})=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-3\vec{g}$

$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}$　　よって　示された．

2　△ABC と点 P に関して，等式 $6\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立っている．次の問いに答えよ．

(1)　点 P の位置を答えよ．

(2)　面積比 △PBC：△PCA：△PAB を求めよ．



(1)　$6\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$　より

$6\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$11\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

よって　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{11}=\dfrac{5}{11}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}$

$\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}=\overrightarrow{AQ}$　とおくと　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{11}\overrightarrow{AQ}$

したがって　辺 BC を 2：3 に内分する点を Q とすると，

点 P は**線分 AQ を 5：6 に内分する点**である．

(2)　$\triangle ABC=S$ とすると

$\triangle PBC=\dfrac{6}{11}\triangle ABC=\dfrac{6}{11}S$　　よって　$\triangle PCA+\triangle PAB=\dfrac{5}{11}S$

さらに　△PCA：△PAB＝3：2　より

$\triangle PAB=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{11}S=\dfrac{2}{11}S$　　$\triangle PCA=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{11}S=\dfrac{3}{11}S$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

したがって　$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{6}{11}S:\dfrac{3}{11}S:\dfrac{2}{11}S=\mathbf{6:3:2}$

3　平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 1：2 に内分する点を E，対角線 BD を 3：2 に内分する点を F とする．このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$　とする．

BF：FD＝3：2 より $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3+2}=\dfrac{2\vec{b}+3\vec{d}}{5}=\dfrac{1}{5}(2\vec{b}+3\vec{d})$

CE：ED＝1：2 より $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{1+2}=\dfrac{2(\vec{b}+\vec{d})+\vec{d}}{3}=\dfrac{2\vec{b}+3\vec{d}}{3}=\dfrac{1}{3}(2\vec{b}+3\vec{d})$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　より，3 点 A，F，E は一直線上にある．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　平面ベクトル(3)

△ABC と点 P に対して，等式　$5\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立つとき，

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\boxed{ア}\overrightarrow{AB}+\boxed{イ}\overrightarrow{AC}}{\boxed{ウエ}}=\dfrac{\boxed{ア}+\boxed{イ}}{\boxed{ウエ}}\cdot\dfrac{\boxed{ア}\overrightarrow{AB}+\boxed{イ}\overrightarrow{AC}}{\boxed{ア}+\boxed{イ}}$ と変形できる．$\dfrac{\boxed{ア}\overrightarrow{AB}+\boxed{イ}\overrightarrow{AC}}{\boxed{ア}+\boxed{イ}}=\overrightarrow{AQ}$ とおくと，点 Q は辺 BC を $\boxed{イ}:\boxed{ア}$ に内分する点であり．点 P は線分 AQ を $\boxed{オ}:\boxed{カ}$ に内分する点である．また面積比 △PBC：△PCA：△PAB＝$\boxed{キ}:\boxed{ク}:\boxed{ケ}$ である．

$5\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$　より

$5\overrightarrow{AP}+4(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$12\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$　　よって　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\mathbf{4}\overrightarrow{AB}+\mathbf{3}\overrightarrow{AC}}{\mathbf{12}}=\dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{7}$

$\dfrac{4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{7}=\overrightarrow{AQ}$ とおくと，点 Q は辺 BC を 3：4 に内分する点である．

また，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{7}{12}\overrightarrow{AQ}$　より　点 P は線分 AQ を **7**：**5** に内分する点である．

△ABC＝S とすると，△PBC＝$\dfrac{5}{12}S$，△PCA＋△PAB＝$\dfrac{7}{12}S$ である．

△PCA：△PAB＝CQ：QB＝4：3　より

△PCA＝$\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{7}{12}S=\dfrac{4}{12}S$　　△PAB＝$\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{7}{12}S=\dfrac{3}{12}S$

したがって △PBC：△PCA：△PAB＝$\dfrac{5}{12}S:\dfrac{4}{12}S:\dfrac{3}{12}S=\mathbf{5:4:3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。